



گزینه ۱

۱

طول نقاط اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر f از حل معادله $f'(x) = 0$ به دست می‌آید.

$$f'(x) = 6x^2 - 24 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

x	-2	2
f'(x)	+	-
f(x)	↗	↘
	max	min

طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی f برابر با -2 است.

$$f(-2) = 2(-2)^3 - 24(-2) + a = a + 32$$

ازطرفی نقطهٔ $(-2, a + 32)$ روی خط $y = -8x + 1$ قرار دارد، پس:

$$a + 32 = -8(-2) + 1 \Rightarrow a = -15$$

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + b$$

چون نقطه $A(-4, 2)$ نقطه اکسترمم تابع f است، پس اولاً $f(-4) = 2$ ، ثانیاً $f'(-4) = 0$. بنابراین داریم:

$$f(-4) = 2(-64) + 16a + b = 2 \Rightarrow 16a + b = 130 \quad (1)$$

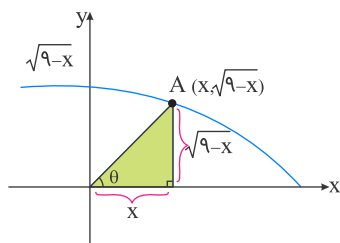
$$f'(x) = 6x^2 + 2ax \Rightarrow f'(-4) = 96 - 8a = 0 \Rightarrow a = 12$$

$$\xrightarrow{(1)} 16(12) + b = 130 \Rightarrow b = -62$$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 24x = 0 \Rightarrow 6x(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -4$$

x	$-\infty$	-4	0	$-\infty$
y'		+	-	+
y		$\nearrow$ max نسبی	$\searrow$ min نسبی	$\nearrow$

بنابراین طبق جدول، نقطه $x = -4$ ، نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.



نقطه $A(x, \sqrt{9-x})$ را روی منحنی $y = \sqrt{9-x}$ در نظر می‌گیریم. مساحت

$$S = \frac{x\sqrt{9-x}}{2} \text{ مثلث برابر است با:}$$

برای اینکه مساحت ماکزیمم شود مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \frac{1}{2} \times \sqrt{9-x} - \frac{1}{2\sqrt{9-x}} \times \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{9-x} = \frac{x}{2\sqrt{9-x}}$$

$$\Rightarrow 2(9-x) = x \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$$

به ازای $x = 6$ مساحت ماکزیمم می‌شود. حالا $\tan \theta$ را پیدا می‌کنیم:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{9-x}}{x} \xrightarrow{x=6} \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی F' ، باید نقاطی را پیدا کنیم که $F'' = 0$ یا F'' موجود نباشد.

$$F'(x) = -2xF(x) \quad (*) \quad \xrightarrow[\text{مشتق می‌گیریم}]{\text{از دو طرف}} F''(x) = -2xF'(x) - 2F(x)$$

$$\xrightarrow{(*)} F''(x) = -2x(-2xF(x)) - 2F(x) = -2F(x)(-2x^2 + 1)$$

بدیهی است نقطه‌ای وجود ندارد که F'' موجود نباشد، اما با توجه به اینکه $F(x) \neq 0$ است، $F'' = 0$ در نقاط $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ به دست می‌آید که همان نقاط بحرانی F' است و حاصل ضرب آن‌ها $\frac{-1}{2}$ می‌شود.

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{x\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} - \frac{1}{2}}{x\sqrt{x}}$$

$$\text{نقطه بحرانی} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

رسم جدول تغییرات:

x	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$-\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f		min	

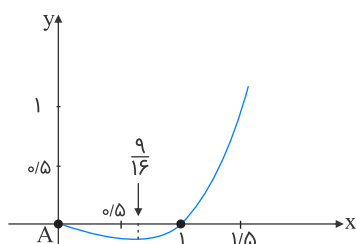
دامنه تابع $f(x) = x^2 - x\sqrt{x}$ برابر با $[0, +\infty)$ است. نقاطی از دامنه را می‌خواهیم که مشتق تابع در آن نقاط منفی یا صفر باشد.

$$f'(x) = (x^2 - x^{\frac{3}{2}})' = 2x - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 2x - \frac{3}{2}\sqrt{x} = 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \frac{3}{4}) \leq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - \frac{3}{4} \leq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow x \leq \frac{9}{16}$$

بنابراین تابع در فاصله $[0, \frac{9}{16}]$ اکیداً نزولی است.

نمودار تابع به صورت زیر است:



$$F(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 & ; x \geq 6 \\ -x^3 + 6x^2 & ; x < 6 \end{cases} \Rightarrow F'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12x & ; x > 6 \\ -3x^2 + 12x & ; x < 6 \end{cases}$$

واضح است که تابع در $x = 6$ مشتق‌پذیر نیست، اما برای اینکه نقاط بحرانی F' را پیدا کنیم باید نقاطی را به دست آوریم که اولاً در دامنه F' باشد ثانیاً $F'' = 0$ یا F'' موجود نباشد.

$$F''(x) = \begin{cases} 6x - 12 & ; x > 6 \\ -6x + 12 & ; x < 6 \end{cases}$$

$$F'' = 0 \Rightarrow x = 2$$

در نقطه $x = 6$ هم F'' موجود نیست. البته $x = 6$ در دامنه F' نیست، پس نمی‌تواند بحرانی F' باشد.

زمانی که قطار در آن مسافت ۱ کیلومتر را طی می‌کند، حساب می‌کنیم:

$$x = vt \Rightarrow l = vt \Rightarrow t = \frac{l}{v}$$

هزینه سوخت در این زمان را حساب می‌کنیم:

$$w_{ov} \times \frac{l}{v} = w_{ov}^r$$

سایر هزینه‌ها در همین زمان را به دست می‌آوریم:

$$Y, 500,000 \times \frac{l}{v} = \frac{Y, 500,000}{v}$$

تابع مجموع هزینه‌ها در این زمان را می‌نویسیم:

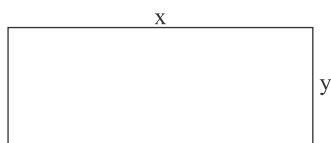
$$y = w_{ov}^r + \frac{Y, 500,000}{v}$$

$$y' = f_{ov} - \frac{Y, 500,000}{v^2}$$

ریشه‌های مشتق را پیدا می‌کنیم:

$$\xrightarrow{y'=0} f_{ov} - \frac{Y, 500,000}{v^2} = 0 \xrightarrow{\times v^2} f_{ov} v^2 - Y, 500,000 = 0$$

$$\Rightarrow v^2 = 125000 \Rightarrow v = 50$$



$$\text{محیط} = 2(x + y) = 14 \Rightarrow x + y = 7$$

ماکزیم مساحت وقتی رخ می‌دهد که $x = y = \frac{7}{2}$ باشد:

$$\text{Max}(S) = \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$$

ابتدا دامنه تابع f را حساب می‌کنیم:

$$x^2 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x|^2 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x|(|x| - 1) \geq 0$$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$$

تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم و f' را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - |x|} = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x} & ; x \geq 1 \\ 0 & ; x = 0 \\ \sqrt{x^2 + x} & ; x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} & ; x > 1 \\ \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} & ; x < -1 \end{cases}$$

باتوجه به دامنه f ، نقاط به طول‌های ± 1 و 0 مشتق در آن‌ها وجود ندارد، پس این نقاط بحرانی هستند. اکنون نقاطی که مشتق در آن‌ها صفر می‌شود را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin D_f \\ 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \notin D_f \end{cases}$$

بنابراین این تابع، سه نقطه بحرانی $x = 0, 1, -1$ دارد.

$$\text{بحرانی} \Rightarrow f'(x) = -6x^2 + 18x = 0 \Rightarrow -6x(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \notin [-1, 2] \end{cases} \Rightarrow \text{بحرانی نیست}$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = -13 \Rightarrow \text{min مطلق}$$

$$\text{بحرانی: } x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2 + 9 - 13 = -2$$

$$\text{بحرانی: } x = 2 \Rightarrow f(2) = -16 + 36 - 13 = 7 \Rightarrow \text{max مطلق}$$

پس:

$$\text{max} - \text{min} = 7 - (-13) = 20$$

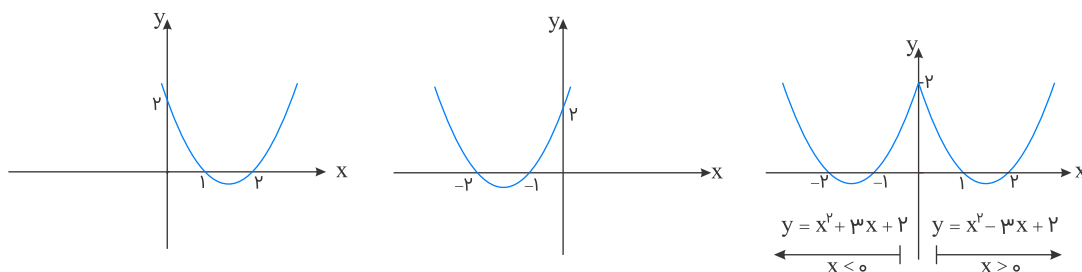
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c > 0 \quad (1)$$

اگر قرار باشد (۱) همواره در $(-\infty, 2)$ برقرار باشد باید $a = 0$ و معادله $2bx + c = 0$ ریشه $x = 2$ داشته باشد.

$$x = 2 \Rightarrow 4b + c = 0 \Rightarrow b = -1$$

بهتر است تابع را با تعیین علامت قدرمطلق رسم کنیم:

$$y = x^2 - 3|x| + 2 = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & ; x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 & ; x < 0 \end{cases}$$



می‌بینیم تابع دارای سه اکسترمم نسبی به طول‌های $\pm \frac{3}{2}$ و $x = 0$ است.

از شکل معلوم است که $1 + 2x = 20$ ، همچنین حجم جعبه برابر است با:

$$V = l^2 \cdot x \xrightarrow{x = \frac{20-l}{2}} V = l^2 \left(\frac{20-l}{2} \right) = 10l^2 - \frac{1}{2}l^3$$

$$\xrightarrow{l \in [0, 20] \text{ نقاط بحرانی}} V' = 20l - \frac{3}{2}l^2 = 0 \xrightarrow{\text{نقاط بحرانی}} \begin{cases} l = 0 \\ l = \frac{40}{3} \end{cases}$$

دقت کنید که ابتدا و انتهای بازه نیز نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

$$\xrightarrow{\text{نقاط بحرانی و بحرانی اول و آخر بازه}} \begin{cases} l = 0 \Rightarrow V = 0 \\ l = \frac{40}{3} \Rightarrow x = \frac{10}{3} \Rightarrow V = l^2 \cdot x = \frac{16000}{27} \text{ (max)} \\ l = 20 \Rightarrow V = 0 \end{cases}$$

پس در صورتی که $x = \frac{10}{3} \text{ cm}$ از هر لبه تا کنیم، حجم آن حداکثر می‌شود.

اولاً تابع در $x = 0$ پیوسته نیست، زیرا:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & ; x \geq 0 \\ 4 + |3x| & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 3x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (4 + |3x|) = 4$$

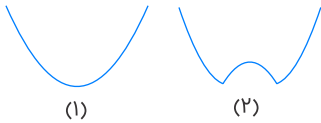
پس در $x = 0$ مشتق‌پذیر هم نیست و این نقطه، بحرانی است. حالا بررسی می‌کنیم در چه نقاطی مشتق صفر است. توجه کنید که اگر $x < 0$ باشد آنگاه $|3x| = -3x$ می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & ; x \geq 0 \\ 4 - 3x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & ; x > 0 \\ -3 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$x > 0 \text{ اگر } \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

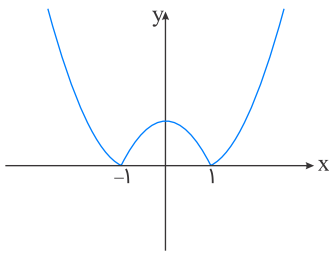
پس مشتق تابع در $x = 1$ هم صفر می‌شود، پس این نقطه هم بحرانی است و در کل تابع ۲ نقطه بحرانی دارد.

اگر $a \leq 0$ باشد نمودار تابع $f(x) = |x^2 - a| = x^2 - a$ به صورت شکل (۱) می‌شود. اگر $a > 0$ باشد نمودار این تابع به صورت شکل (۲) می‌شود و در این صورت ۳ نقطه بحرانی خواهد داشت.

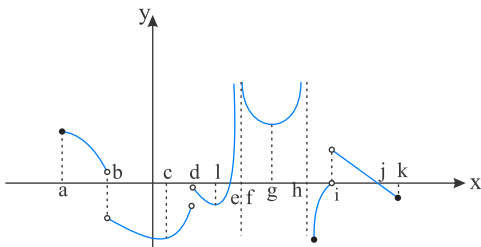


برای مثال تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را ببینید:

مشتق تابع در $x = 0$ برابر صفر می‌شود. به علاوه تابع در $x = \pm 1$ مشتق‌پذیر نیست، پس تابع در $x = 0$ و $x = \pm 1$ دارای نقاط بحرانی است.



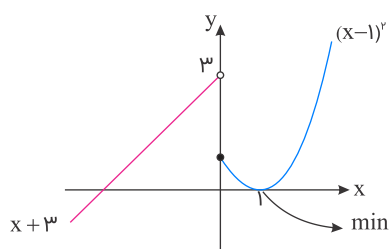
اگر مشتق از منفی به مثبت برود، آن نقطه، نقطهٔ مینیمم f است. نقاط بحرانی f ، ابتدا و انتهای بازه و همچنین نقاطی هستند که f' موجود نیست یا صفر است.



نقاط $\min$ تابع $f = \{e, i\}$

نقاط بحرانی $f = \{a, b, d, e, f, h, i, j, k\}$

با رسم تابع داریم:



تابع فقط یک مینیمم نسبی دارد.

به دنبال ماکزیمم مطلق تابع در بازه $t \in [0, +\infty)$ است.

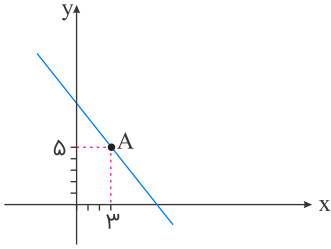
$$c'(t) = \frac{2(t^2 + 6) - 2t(2t)}{(t^2 + 6)^2} = \frac{12 - 2t^2}{(t^2 + 6)^2}$$

$$\Rightarrow c'(t) = 0 \Rightarrow 12 - 2t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 6 \Rightarrow t = \sqrt{6}h$$

مقدار تابع در نقطه بحرانی و همچنین بحرانی اول و آخر بازه:

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow c(t) = 0 \\ t = \sqrt{6} \Rightarrow c(t) = \frac{2\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad (\text{max}) \\ t = +\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = 0 \end{cases}$$

پس حداکثر غلظت دارو در $t = \sqrt{6}h$ اتفاق می‌افتد.



معادله خطی که از $A(3, 5)$ می‌گذرد به صورت $y - 5 = m(x - 3)$ است. برای پیدا کردن عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط مقادیر x و y را صفر می‌گذاریم:

$$x = 0 \Rightarrow y - 5 = -3m \Rightarrow y = -3m + 5$$

$$y = 0 \Rightarrow -5 = m(x - 3) \Rightarrow x = -\frac{5}{m} + 3$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{xy}{2} = \frac{(-3m + 5) \left(-\frac{5}{m} + 3\right)}{2} = 15 - \frac{25}{2m} - \frac{9}{2}m$$

$$S' = \frac{25}{2m^2} - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow \frac{25}{2m^2} = \frac{9}{2} \Rightarrow m^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow m = \pm \frac{5}{3}$$

توجه کنید که شیب خط داده شده باید منفی باشد.